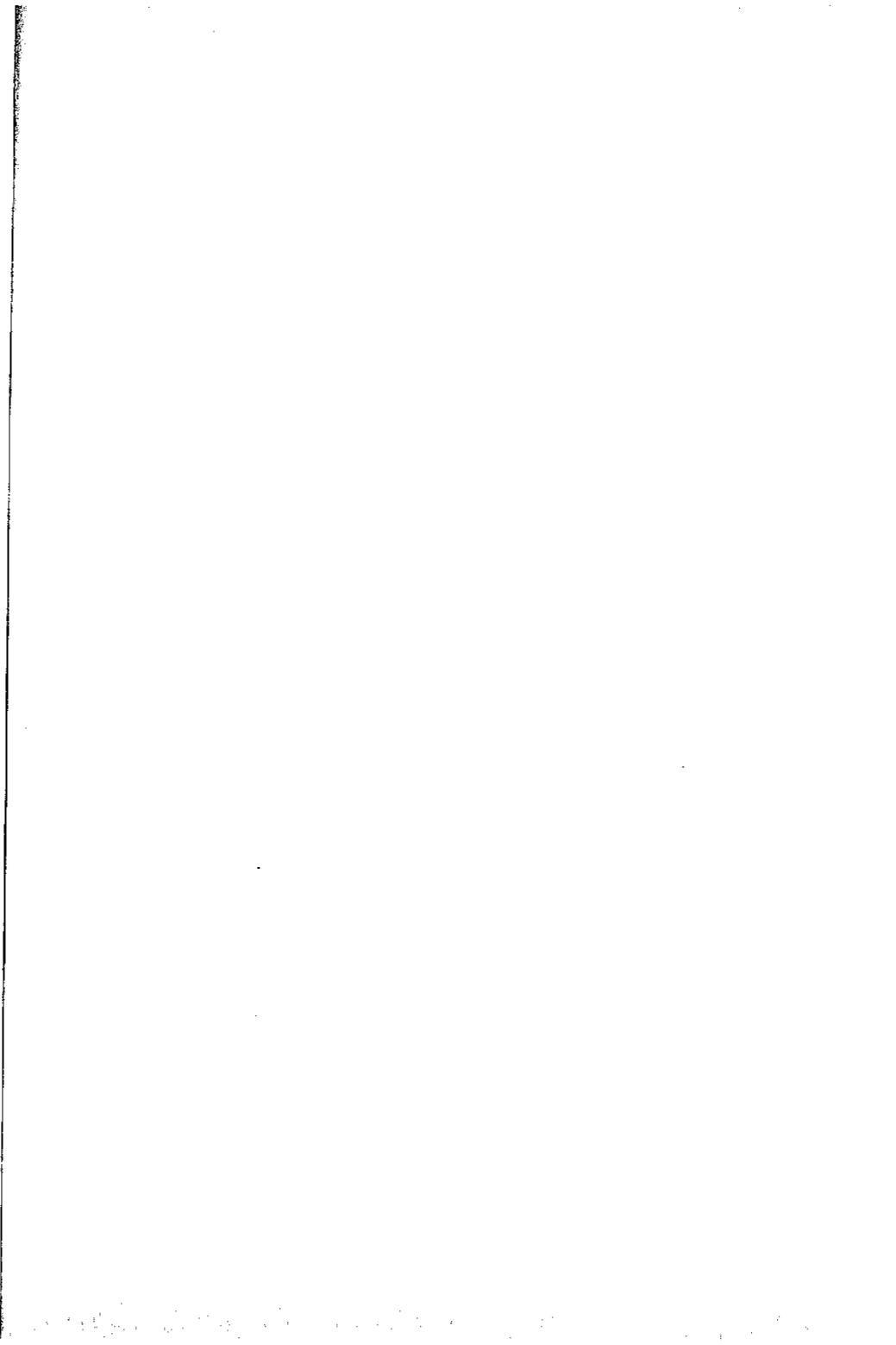


Al Maestro

Jorge Velazco

JUEGO DE DADOS MUSICAL DE MOZART



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Dr. Juan Ramón de la FuenteRamírez
Rector

Lic. Enrique del Val Blanco
Secretario General

Dr. Daniel Barrera Pérez
Secretario Administrativo

Lic. Armando Labra Manjarrez
Secretario de Planeación y Reforma Universitaria

Lic. Alberto Pérez Blas
Secretario de Servicios a la Comunidad Universitaria

Dra. Arcelia Quintana Adriano
Abogada General

Dr. René Drucker Colín
Coordinador de la Investigación Científica

**INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS
APLICADAS Y EN SISTEMAS**

Dr. Federico O'Reilly Togno
Director

Dra. Silvia Ruiz-Velasco Acosta
Secretaria Académica

Sr. Enrique Pérez García
Secretario Técnico

C.P. María Antonieta Osorio López
Secretaria Administrativa

JUEGO DE DADOS MUSICAL DE MOZART

Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) compuso la obra *Musikalisches Würfelspiel*, singular creación artística en la que el ingenio del músico lo llevó a componer no una pieza para piano sino un generador de *valse*s. Esto es, la obra no contiene una partitura para un pequeño *valse* de 16 compases sino que tiene un sistema que, apoyado en el azar, puede generar un número *mucho* muy grande de *valse*s diferentes de 16 compases cada uno.

Mozart escribió 176 compases numerados del 1 al 176 y los agrupó en 16 conjuntos de 11 compases cada uno. El procedimiento para generar un *valse* particular a partir de esta combinación de habilidad en la composición y el uso del azar, consiste en que cada compás del 1 al 16 se selecciona con unos dados, del correspondiente conjunto de 11 compases. Estos 16 conjuntos o columnas de números, que identifican cada uno de los 176 compases, son los siguientes:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5



	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

En el encabezado, en números romanos aparece el número del compás e identificando cada una de las filas aparece un número entre 2 y 12 que corresponde a la suma de las caras de dos dados que deben ser lanzados para definir en cada compás, cuál es el elemento que deberá incluirse en la partitura. La obra aparece publicada por primera vez en la Edición de J.J. Hummel, Berlín-Amsterdam, 1793.

Existen en muchos sitios referencias al "Juego de Dados Musical de Mozart", en los cuales se enfatiza el número de posibles combinaciones en la elección de la partitura. Existen, también, en la red de *Internet*, varios sitios en los que se simula este Juego de Dados e inclusive se escucha el *vals* particular con la calidad sonora de un sintetizador y las restricciones de audio del equipo de cómputo con el que se conecta uno a la red.

2

Sin entrar al detalle más fino como lo es el que algunos compases son iguales aunque tengan distinto número que los identifica, en principio el número de posibles partituras corresponde al número 11^6 , que se lee como el número 11 elevado a la potencia 6. Este número es tan grande que se estima que si se interpretaran continuamente y con un orden sistemático, todas las partituras posibles; y cada interpretación tardara 30 segundos, entonces para agotar todas las posibilidades, se excederían 728 millones de años, interpretando la obra de día y de noche y de manera continua.

Dicho lo anterior es importante mencionar que no todas las realizaciones para la suma de dos dados, son igualmente probables. La distribución probabilística para la suma de las caras de dos dados lanzados al azar, se deduce haciendo la observación de que la suma = 2 sólo cuando en ambas caras aparece el número 1, esto es: (1,1) y la suma = 3 cuando: (1, 2) o bien (2, 1), y así las demás, como la suma = 9 cuando: (3, 6) o (4, 5) o (5, 4) o (6, 3). Se observa que el número total de pares (i,j) es 36. Las referidas probabilidades de la suma son entonces:

$$\text{Prob}(2) = 1/36 = \text{Prob}(12)$$

$$\text{Prob}(3) = 2/36 = \text{Prob}(11)$$

$$\text{Prob}(4) = 3/36 = \text{Prob}(10)$$

$$\text{Prob}(5) = 4/36 = \text{Prob}(9)$$

$$\text{Prob}(6) = 5/36 = \text{Prob}(8)$$

$$\text{Prob}(7) = 6/36$$

Los 16 lanzamientos del par de dados se hacen de manera independiente y observar que las 16 sumas dieran como resultado, por ejemplo,

(2, 4, 11, 6, 7, 6, 11, 8, 3, 5, 4, 8, 2, 12, 10, 7),

tiene una probabilidad asociada. Se calcula su probabilidad de ocurrencia multiplicando las 16 probabilidades que le corresponden a cada uno de los números ejemplificados, la del 2, la del 4, la del 11, etcétera. En este caso el resultado es:

$$\text{Prob} = \left(\frac{1}{36}\right)^{16} (1 \times 3 \times 2 \times 5 \times 6 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 4 \times 3 \times 5 \times 1 \times 1 \times 3 \times 6).$$

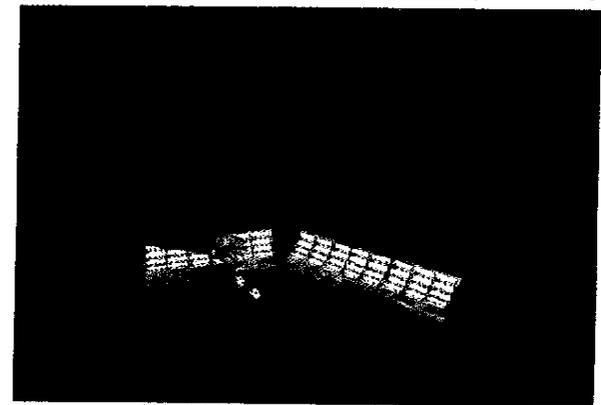
De todas las más de 45,949 billones de posibles realizaciones (11^{16}), muchas comparten el tener la misma probabilidad de ocurrir pero sólo una de ellas se distingue, desde el punto de vista probabilístico, en tener la probabilidad de ocurrencia más alta. Ésta corresponde a la

IIMAS-UNAM

realización en donde para cada uno de los 16 compases, los dados suman 7 en todas las ocasiones. La probabilidad de dicha realización es $(1/6)^{16}$.

Si como se dijo anteriormente, cada 30 segundos se interpreta una realización del Juego de Dados pero siguiendo al pie de la letra la selección aleatoria, la realización más probable que se ha mencionado, ocurriría "en promedio" cada 44,728 años. Haciendo un cálculo similar, una de las menos probables, por ejemplo (2, 2, 2, ..., 2), ocurriría "en promedio" cada 126,184 billones de años, en donde recordamos que un billón es un millón de millones (no así en otros idiomas). Por ello no pensamos que sea una exageración el que cada vez que se anuncia que se interpretará el Juego de Dados, se presume como Estreno Mundial. Se estima que el Big Bang (inicio del Universo como lo conocemos) ocurrió hace aproximadamente 13 a 15 mil millones de años y que la existencia de nuestro astro solar, que lleva media vida, durará todavía unos 5 mil millones de años. Esto es sin duda información para reflexionar. La obra El Juego de Dados, interpretada siguiendo la selección aleatoria descrita, para permanecer en nuestra cultura y agotar sus posibles realizaciones, evidentemente requerirá de la colonización de otros sistemas solares y que desde luego, no se les olvide llevarla.

Aún cuando los 176 compases fueron escritos para piano suelen hacerse arreglos para incorporar otros instrumentos. La Orquesta Sinfónica de Minería le proporcionó a este Instituto, el IIMAS de la UNAM, un arreglo de 176 compases para cuatro cuerdas, con la idea de hacer un sistema computarizado. Dicho arreglo fue capturado con



un programa llamado *Finale* y se crearon archivos en lo que es referido como un arreglo matricial de 11×16 , en el cual en cada celda de la matriz podría identificarse el compás correspondiente para los cuatro instrumentos. Cada objeto o elemento de esa matriz queda asociado a su vez a un elemento gráfico y se desarrolló un programa que lleva a cabo una simulación aleatoria de las 16 tiradas de un par de dados y se identifica entonces la secuencia de objetos gráficos que forman la partitura decidida por el azar. Dicha combinación se imprime en forma de partitura y también por separado para cada uno de los cuatro instrumentos de cuerda.

Se ilustra la partitura de la realización más probable

Musical score for Violin I, Violin II, Viola, and Violoncello, measures 104-168. The score is written in treble clef for Violin I and II, and bass clef for Viola and Violoncello. The key signature has one flat. The time signature is 4/4. The score shows a complex rhythmic pattern with many sixteenth and thirty-second notes. Measure numbers 104, 157, 27, 167, 154, and 68 are indicated above the Violin I staff.

Musical score for Violin I, Violin II, Viola, and Violoncello, measures 118-138. The score is written in treble clef for Violin I and II, and bass clef for Viola and Violoncello. The key signature has one flat. The time signature is 4/4. The score shows a complex rhythmic pattern with many sixteenth and thirty-second notes. Measure numbers 118, 91, 12, 138, and 71 are indicated above the Violin I staff.

Musical score for Violin I, Violin II, Viola, and Violoncello, measures 150-151. The score is written in treble clef for Violin I and II, and bass clef for Viola and Violoncello. The key signature has one flat. The time signature is 4/4. The score shows a complex rhythmic pattern with many sixteenth and thirty-second notes. Measure numbers 150, 29, 101, 162, 23, and 151 are indicated above the Violin I staff.

IIMAS-UNAM

Todas las obras de Mozart han sido catalogadas por su número Köchel y esta obra en particular, *Musikalisches Würfelspiel* es la K. 294 (Anh.C), así que ha sido propuesto que cada realización pudiera tener un número particular Köchel que la identifique. Es relativamente simple hacer una extensión con 16 "dígitos" utilizando un sistema de base 11, por ejemplo, los "dígitos" 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y A. La correspondencia entre la suma de los dados y cada uno de los 16 compases representaría a la suma igual a 2 con "0", la suma igual a 3 con "1" y finalmente la suma igual a 12 con "A". Así la partitura más probable tendría el número Köchel, K. 294.5555555555555555.

Agradecimiento

Agradecemos la colaboración para la captura de la base de datos formada por los 176 compases a Federico O'Reilly Regueiro.

Asimismo, agradecemos a Víctor Hugo Godoy Aguirre de la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico por su apoyo en el modelado geométrico y animación del personaje que representa a Mozart.

IIMAS-UNAM

Juego de dados musical de Mozart, Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la UNAM. Se terminó de imprimir el mes de julio de 2003, en los Talleres de Impretei, Almería No. 17, Colonia Postal, C.P. 03410, México, D.F., con un tiraje de 6,000 ejemplares.

Edición

Lic. María Ochoa Macedo

Diseño de portada

D.C.G. Vanessa Gil Tejeda